EXERCICE

Soit ω un réel donné, différent de zéro.

1° Montrer qu'il existe une fonction y et une seule, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivable, et telle que :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \sin^2 x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exprimer y à l'aide de fonctions à valeurs réelles. Discuter suivant les valeurs de ω.

2° Montrer qu'il existe deux réels A et k, indépendants de ω, que l'on déterminera, tels que, au voisinage de $x = 0$, y soit équivalente à Ax^k.

PROBLÈME

A tout entier n, strictement positif, on associe la fonction I_n, définie sur l'ensemble des réels strictement positifs, et telle que :

$$I_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n}\, dt.$$

1° *a.* Justifier l'existence de $I_n(x)$.

b. Étudier les variations de I_n.

c. Montrer : $0 < I_n(x) < \dfrac{e^{-x}}{x^n}$.

d. Trouver un équivalent simple de I_n au voisinage de $x = 0$ (on pourra chercher d'abord un encadrement de $I_1(x) - I_1(1)$, en partant de l'encadrement $1 - t < e^{-t} < 1$, qui est valable pour t positif, et que l'on justifiera).

2° *a.* Établir une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.

b. Exprimer $I_1(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

3° Pour tout x réel strictement positif et pour tout k entier positif ou nul, on pose :

$$u_k(x) = \frac{(-1)^k\, k!\, e^{-x}}{x^{k+1}}, \quad \text{avec} \quad 0! = 1.$$

a. x étant fixé, étudier les variations de $|u_k(x)|$ en fonction de k, en utilisant

$$\frac{|u_{k+1}(x)|}{|u_k(x)|}.$$

b. La série de terme général $u_k(x)$ est-elle convergente ou divergente?

Les questions 4, 5 et 6 sont indépendantes entre elles

4° *a.* En utilisant (2° *b.*) et (1° *c.*) montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^x I_1(x)$ possède, quel que soit l'entier N positif ou nul, un développement limité à l'ordre N suivant les puissances de $X = \dfrac{1}{x}$.

b. f est-elle développable en série entière suivant les puissances de X?

5° On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy' - y = e^{-x}$$

où l'inconnue y est définie sur l'ensemble des réels strictement positifs.

a. Exprimer à l'aide de I_1 la solution y_λ de (E) telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y_\lambda(x)}{x} = \lambda \qquad \lambda \text{ étant un réel donné.}$$

b. Étudier les variations de y_λ et sa représentation graphique C_λ dans un repère Oxy d'un plan affine. On étudiera en particulier la branche infinie de C_λ et la forme de C_λ au voisinage de l'abscisse zéro.

Dessiner sur une même figure quelques courbes C_λ de façon à mettre en évidence leurs diverses formes, et l'ensemble des points de ces courbes en lesquels la tangente est parallèle à Ox.

6° Pour tout entier positif ou nul p, on pose :

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} u_k(x)$$

$u_k(x)$ étant défini à la question 3.

a. Montrer que $I_1(x)$ est strictement compris entre $S_p(x)$ et $S_{p+1}(x)$.

b. En utilisant (3° *a.*), trouver un encadrement de $I_1(4)$ par deux nombres décimaux aussi voisins que possible.

XXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail